14. Prakticheskoe zanjatie “Ocenka effektivnosti dvoichnogo blochnogo koda s ispravleniem dvuh oshibok”

Составим сводную таблицу возможных сочетаний ошибок и вероятностей появления этих сочетаний в (m, k)-коде Для упрощения таблицы, без потери общности анализа, ограничимся значением m=4.

Таблица

Количество *i* ошибок в кодовомслове	0	1	2	3	4
Вероятность наличия ровно *i* ошибок в кодовом слове	$p^0(1–p)^4$	$p^1(1–p)^3$	$p^2(1–p)^2$	$p^3(1–p)^1$	$p^4(1–p)^0$
Количество возможных сочетаний ровно *i* ошибок в кодовом слове	$C_4^0 = 1$	$C_4^1 = 4$	$C_4^2 = 6$	$C_4^3 = 4$	$C_4^4 = 1$
Всего способов	1+4+6+4+1=16				
Вероятность сочетания ровно из *i* ошибок в кодовом слове	$C_4^0 p^0 (1-p)^4$	$C_4^1 p^1 (1-p)^3$	$C_4^2 p^2 (1-p)^2$	$\tilde{N}_4^3 p^3 (1-p)^1$	$C_4^4 p^4 (1-p)^0$
Вероятность реализации одного из сочетаний	$\sum_{i=0}^{m} \tilde{N}_m^i p^i (1-p)^{m-i} = C_4^0 p^0 (1-p)^4 + C_4^1 p^1 (1-p)^3 + C_4^2 p^2 (1-p)^2 +$ $\tilde{N}_4^3 p^3 (1-p)^1 +$ $+ C_4^4 p^4 (1-p)^0 + \ldots$				

Если избыточный (m, k)-код исправляет c ошибок, то вероятность его безошибочной работы (ВБР$_{\text{и}}$) на втором этапе равна $1–P_{m,k}$, где вероятность кодовой ошибки

$$P_{m,k} = 1 - \sum_{i=0}^{c} C_m^i p^i (1-p)^{m-i} = \sum_{i=c+1}^{m} C_m^i p^i (1-p)^{m-i} . \qquad (3)$$

Введем, следуя Л.М. Финку, понятие эквивалентной вероятности $p_{\text{экв}}$ ошибки. Это такая требуемая вероятность ошибки, при которой безызбыточный (k, k)-код обеспечил бы такую же ВБР, как избыточный (m, k)-код. Согласно (1) ВБР$_{\text{б}}$ (k, k)-кода при $p=p_{\text{экв}}$ равна $(1– p_{\text{экв}})^k$. Приравняем ВБР обоих кодов, учитывая (3):

$$(1-p_{\text{экв}})^k = 1 - P_{m,k} ,$$

Или, после извлечения корня

$$p_{\text{экв}} = 1 - \left[1 - P_{m,k}\right]^{\frac{1}{k}} .$$

Применяя биномиальное разложение к правой части, получим

$$p_{\text{экв}} = 1 - \left[1^{\frac{1}{k}} - \frac{\frac{1}{k}}{1!} \cdot 1^{\frac{1}{k}-1} \cdot P_{m,k} + \frac{\frac{1}{k} \cdot \left(\frac{1}{k} - 1\right)}{2!} \cdot 1^{\frac{1}{k}-2} \cdot P_{m,k}^2 - \ldots \right] \cong \frac{P_{m,k}}{k} .$$

При p<<1 можно считать, что в формуле (3) $P_{m,k} \cong C_m^{c+1} p^{c+1}$, тогда

$$p_{\text{ýêâ}} \cong \frac{C_m^{c+1} p^{c+1}}{k} ,$$

или

$$\frac{p_{\text{ýêâ}}}{p} \cong \frac{C_m^{c+1} p^c}{k} .$$

Например, при k=4, m=7, c=1, p=10^{-6}

$$p_{\text{экв}} = \frac{21 p^2}{4} \cong 5 p^2 = 5 \cdot 10^{-12} ,$$

$$\frac{p_{\text{ýêâ}}}{p} \cong \frac{C_m^{c+1} p}{4} = 5 p = 5 \cdot 10^{-6} .$$

Из этого примера видно, что для достижения такого же качества передачи, какое дает (m, k)-код с исправлением одной ошибки в кодовом слове (c=1) при p=10^{-6}, безызбыточный (k, k)-код требует обеспечить вероятность ошибки $p_{экв}$ в канале, меньшую в $10^6/5$=200000 раз (≅50 дБ). Иными словами, помехоустойчивый код, исправляющий хотя бы одну ошибку в кодовом слове, позволяет очень существенно снизить требования к каналу связи, Например, применив такой код, можно значительно уменьшить требуемое отношение сигнал-помеха на входе приемника: уменьшить мощность передатчика и (или) упростить антенную систему, увеличить длину радиотрассы и т. п. Правда, эти положительные свойства приобретаются не даром, а за счет расширения спектра сигнала в m/k раз, усложнения аппаратуры, появления временных задержек в кодирующих и декодирующих устройствах. Давно известно, что за все хорошее нужно платить!